ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

β) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

γ) 1. Σ , 2. Σ , 3. Λ , 4. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} (-x-3) = -\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} (2x+1) = -\frac{5}{3}$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$$

Άρα $\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} f(x) = f\left(-\frac{4}{3}\right)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x_o = -\frac{4}{3}$

β)

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{f(x) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{-x-3+\frac{5}{3}}{x+\frac{4}{3}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{\left(-x-3+\frac{5}{3}\right)'}{\left(x+\frac{4}{3}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} \frac{f(x) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} \frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x+\frac{4}{3}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} \frac{\left(2x+1+\frac{5}{3}\right)'}{\left(x+\frac{4}{3}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} \frac{2}{1} = 2$$

Επειδή $\lim_{x \to -\frac{4}{3}^-} \frac{f(x)-f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} \neq \lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} \frac{f(x)-f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}}$, η f δεν παραγωγίζεται στο $-\frac{4}{3}$

γ)

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < -\frac{4}{3} \\ 2, & \text{αν } x > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

- Όταν $x < -\frac{4}{3}$, η υπόθεση $f(x) + f\,'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

  $-x-3-1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

  $x = -\frac{9}{2}$ δεκτή τιμή

- Όταν $x > -\frac{4}{3}$, η υπόθεση $f(x) + f\,'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

  $2x + 1 + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

  $x = -\frac{5}{4}$ δεκτή τιμή

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$|f(z)| = |f(\overline{z})| \Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z}\right| = \left|\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}}\right|$

$\frac{|z+i|}{|z|} = \frac{|\overline{z}+i|}{|\overline{z}|}$

$|z + i| = |\overline{z} + i|$ (Έστω $z = x + yi$)

$|x + yi + i| = |x - yi + i|$

$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(-y+1)^2}$

$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow y = 0$

Άρα $z = x \in \mathbb{R}$

β)

$$|f(z)| = 1 \iff \left|\frac{z+i}{z}\right| = 1 \iff \frac{|z+i|}{|z|} = 1 \iff |z+i| = |z| \iff$$

$$|z-(0-i)| = |z-(0+0i)|$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των αριθμών z είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(0, -1)$ και $O(0, 0)$

Η εξίσωση αυτής προφανώς είναι η $y = -\frac{1}{2}$

γ)

$$f(z) = \frac{z+i}{z} = \frac{x+yi+i}{x+yi} =$$

$$= \frac{(x+yi+i)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} =$$

$$= \frac{x^2 - xyi + xyi + y^2 + xi + y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} i$$

$$\operatorname{Re} f(z) = 2 \iff \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 2 \iff x^2 + y^2 - y = 0$$

Επειδή $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1 > 0$, η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-\Gamma}}{2} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 4ο

α)

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$, θα ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \iff$

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad \textbf{(1)} \iff$$

$$f(x) = x f'(\xi)$$

β)

Επειδή $\xi < x$ και f' γνησίως αύξουσα, θα είναι $f'(\xi) < f'(x)$

Άρα, λόγω της (1), $f'(x) > \frac{f(x)}{x} \iff xf'(x) > f(x)$ για κάθε $x > 0$ **(2)**

Αλλά $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + e^x > 0$ (λόγω της (2))

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα ‘1—1’

γ)

Από τις υποθέσεις $h(x) = e^x + x^5 + x$ και $h(x) = \dfrac{f(x)}{x} + e^x$ συμπεραίνουμε

$$e^x + x^5 + x = \frac{f(x)}{x} + e^x \Leftrightarrow f(x) = x^6 + x^2$$

$$f(x+1) = (x+1)^6 + (x+1)^2$$

Οπότε

$$I = \int_1^{e-1} f(x+1)dx = \int_1^{e-1}[(x+1)^6 + (x+1)^2]dx =$$

$$= \int_1^{e-1}(x+1)^6 dx + \int_1^{e-1}(x+1)^2 dx =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^7}{7}\right]_1^{e-1} + \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_1^{e-1} =$$

$$= \frac{e^7}{7} - \frac{2^7}{7} + \frac{e^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$